3

DEVS IN ADIVTORIVM MEVM INTENDE.

AGGIVNTA
ALL'OPERETTA DELLE LINEE RETTE EQVIDISTANTI, ET NON EQVIDISTANTI.

Di Pietro Antonio Cataldo.

In Bologna, presso gli Heredi di Gio. Rossi 1604.
Con licenza de' Superiori.

ALL'ILLVSTRISS.^{MO} SIG.
PADRONE OSSERVANDISS.
IL SIGNORE
PIERFRANCESCO MALASPINA
MARCHESE DI EDEFICIO.

AVENDO io con l'aiuto Diuino (non ostante la strana indispositione, che mi tormenta, & le difficoltà, che prouo nel far stampare) espedita la presente Aggiunta all'Operetta delle linee rette equidistanti, & non equidistanti, quale Operetta essendo dedicata in vniuersale à gl'Eccellentissimi SS. Mathematici, hò pensato questa particolare Aggiunta indrizzare anco particolarmente, come fò, à V. S. Illustriss. poiche oltre all'altre molte dottrine, Ella anco in particolare ottimamente possiede le Scienze Mathematiche, & i più reconditi Scrittori d'esse Apollonio, & Archimede, come intendo massime dal Molto Reu. Padre Iosesse Biancano del Iesù Mathematico Eccellentissimo, quale perciò sommamente la ama, & osserua. La supplico hora ad hauer grato, che io habbi ardito di Illustrare queste mie fatiche con lo splendore del nome, & Virtù heroiche di Lei (essercitate con molta sua gloria, & nella Espeditione di Tunisi, & in molte Legationi alla Maestà Cesarea, & in altre occasioni sempre con somma prudenza, & valore, quali lungo saria quì il solo accennarle) & insieme à riceuerle in protettione, riponendomi nel numero di quelli deuotissimi Seruitori, che sempre li desiderano da N. Sig. Dio continui augumenti di felicità. Di Bologna Giouedì primo d'Aprile 1604. duodecimo dell'Ariete, essendo la Luna nel grado secondo di Tauro, & andando alla Congiuntione di Venere nel grado ottauo.

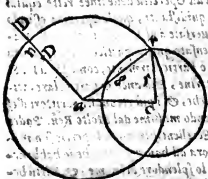
Di V. S. Illustriss.

Humilissimo, & deditiss. Seruitore

Pietro Antonio Cataldo.

Hò inteso, che V. Sig. Illustriss. hà caro di vedere la dimostratione ostensiua, che hò trouata alla settima propositione del primo libro d'Euclide, onde con questa occasione si è posta quì sotto.

PROPOSIT. VII. DEL PRIMO LIBRO degli Elementi d'Euclide.

Se dalli dui pũti terminãti alcuna linea retta siano tirate due linee rette, quali concorrinò insieme in vn'istesso punto, quando dalli medesimi dui punti si tiraranno due altre linee rette dalla medesima parte, eguali ciascuna di loro alla sua conterminale, & che deuano concorrere insieme, è necessario, che elle concorrano nel medesimo punto, doue sono concorse le prime due già tirate.

Dalli dui termini a, & c, della retta a c, siano tirate le due rette a r, sinistra 8, & c r, destra 5. quali cõcorrino insieme nel punto r, dalla parte superiore al la a c, si dice, che se verso la medesima parte superiore si tiraranno due altre rette dalli medesimi punti a, & c, la sinistra eguale alla sinistra sua cõterminale a r. 8, & la destra, eguale alla destra c r. 5, quali deuano cõcorrere insieme, conuerrà che elle cõcorrino nel medesimo punto r, doue sono concorse le prime a r, & c r, già tirate. Per dimostrarlo, fatto centro il punto a, & semidiametro la retta a r. sinistra si formi il Cerchio sinistro, & così sapremo, che tutte le rette, quali partendosi dal punto, ò centro a, deuano essere eguali alla a r, 8, conuerrà, che arriuino, ò vogliamo dire terminino alla circoferenza d'esso Cerchio sinistro (che dentro poniamo nel punto D, ne fuori nel D. non potriano terminare, perche allhora la parte a D, saria eguale al tutto a n, Ouero il tutto a D. saria eguale alla parte a n; il che è impossibile) Ancora fatto centro il punto c. & semidiametro la retta c r, destra si formi il Cerchio destro, & così sapremo che tutte le rette, quali partendosi dal punto, ò centro c. deuano essere eguali alla c r, 5. conuerrà che vadano à terminare nella circonferenza di esso Cerchio destro; douendo dunque di più le due rette da tirarsi dalla parte superiore la sinistra dal termine a, & la destra dal c, (eguali alle a r, & c r, & perciò terminanti in esse circonferenze) concorrere insieme, conuerrà che concorrino in vn punto commune alle circonferenze di detti dui Cerchi, ma il punto ad esse commune, è il punto r, doue elle si intersegano, & perciò doue è il concorso delle prime linee già tirate, però nell'istesso punto dell'intersegamento de' Cerchi, & concorso delle prime linee, conuerrà che ancora concorrino le seconde, da tirarsi, Et così la sinistra si vnirà con la sinistra, & la destra con la destra, che è quanto si volea dimostrare.

Noti il Lettore, che questa settima propositione suole esser chiamata *fuga miserorum*, perche molti principianti, quando vi arriuauano, parendogli ella molto laboriosa, & difficile (che in Euclide, doue si dimostra riducẽdo l'Auersario all'impossibile ha molti Casi) reputando essi lo studio della Geometria similmente laborioso, & difficile, più non vi attendeuano. Hor mò se gli sodisfarà la dimostratione superiore, che è breue, & facile, seguitino pure animosamente questa Scienza, che più non gli succederà cosa difficultuosa, che gli possa impedire, ò ritardare.

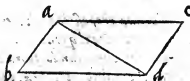
Aggiun-

AGGIVNTA
All'Operetta delle linee rette equidistanti, & non equidistanti.

ET *dicendosi, che nella duodecima propositione di questa Operetta non si proua intieramēte il quinto postulato, poiche se bene si dimostra, che quando sopra à due rette cadēdo vna retta, che le seghi, occorra, che li dui angoli interiori da vna medesma parte siano minori di dui retti; allhora le due rette sono non equidistanti; & più si auicinano dalla banda, doue la somma delli dui angoli interiori è minore di dui retti. Questo non basta à concludere, che prolungate dalla istessa banda, elle finalmente deuano cōcorrere insieme. Perche l'Auersario negarà, che se bene le due rette sono non equidistanti, elle deuano concorrere giamai. Si risponde, che à questo intieramente sodisfa la 28. propositione, & così sarà dimostrato del tutto detto quinto postulato, come anco si viene intieramente à dimostrare dalle due 12. & 30. poiche nella 12. si mostra, che quando le due rette date, segate da vn'altra retta, occorra, che la somma delli dui angoli interiori, fatti da vna medesma parte da esse date, & dalla segante, sia minore di dui retti, allhora esse due rette date sono non equidistanti, & più si auicinano dalla banda, dalla quale detta somma de' dui angoli interiori è minore di dui retti; Et nella 30. si mostra, che quādo due rette date sono non equidistanti, cioè, che più si auicinano da vna banda, che dall' altra, è necessario, che elle allungate dalla banda, dalla quale più si auicinano, finalmente concorrano insieme.*

PROPOSITIONE XVI.

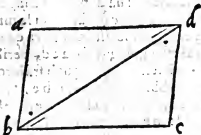
Le linee rette, che congiungono insieme dalle medesime parti due rette date eguali, & equidistanti, anco elle sono frà loro eguali, & equidistanti.

Siano date le due rette ab, & cd, eguali, & equidistāti, & esse dalla medesma parte superiore siano cōgiunte insieme dalla retta a c, & dalla parte inferiore siano congiunte insieme dalla retta b d, si dice queste rette a c, & b d, essere frà loro eguali, & equidistanti.

Per dimostrarlo. Nel quadrilatero a b c d, tirisi vno de' suoi dui diametri, cioè la retta a d, ouero la b c, hor sia la a d, & cōsiderinsi i dui triangoli a d c, & d a b, ne i quali li dui lati c d, d a, dell'vno sono eguali alli dui lati b a, a d, dell'altro, & l'angolo c d a, contenuto da i dui lati detti dell'vno è eguale all'angolo b a d, cōtenuto da i dui lati detti dell'altro (per la 4. di questo) essendo essi angoli coalterni delle due date rette equidistanti a b, c d, segate dalla a d, onde (per la 4. del primo) la base a c, dell'vno, sarà eguale alla base d b, dell'altro, (& queste a c, b d, sono le due rette, che congiungono le date) & gli altri angoli dell' vno saranno eguali à gl' altri angoli corrispondenti dell'altro, cioè il c, al b, & il c a d, al b d a, ma questi c a d, & b d a, sono angoli coalterni delle due rette c a, & b d, segate dalla a d, & però essendo eguali, ne segue (per la 11. di questo) che dette rette c a, & b d, siano equidistanti frà loro. Et di già si è anco prouato, che elle sono eguali, però è noto il proposito.

PROPOSITIONE XVII.

Nelle figure quadrilatere di lati equidistanti i lati, & gl'angoli oppositi sono eguali frà loro, & il diametro le diuide per mezo.

Sia il quadrilatero di lati equidistāti a b c d, & in esso sia tirato vno de' suoi dui diametri, poniamo il b d, si dice, che il lato a d, è eguale al suo opposito b c, l'a b, al d c, l'angolo a, al suo cōtrapposito c, & l'angolo b, al d; Et di più che il diametro b d, diuide esso quadrilatero in due parti eguali. Per dimostrarlo, considerate le due rette equidistanti a d, & b c, segate dalla b d, sapremo (per

mo (per la 4. di questo) che l'angolo a d b, è eguale al suo coalterno c b d, Et anco, perche la istessa retta b d, sega l'altre due rette equidistanti a b, & c d, sapremo similmente (per la 4. di questo) che l'angolo a b d, è eguale allo, à lui coalterno c d b. Onde considerati li dui triangoli a b d, & c d b, de' quali la base b d, dell'vno è eguale alla

base d b, dell'altro, & li dui angoli b, & d, sopra alla base dell'vno, sono eguali alli dui angoli d, & b, sopra alla base dell'altro ciascuno al suo corrispondente; ne segue (per la 26. del primo) che gl'altri lati dell'vno siano eguali à gl'altri lati dell'altro ciascuno al suo corrispōdēte, l'altro angolo dell'vno all'altro angolo dell'altro, & l'vn triangolo all'altro; Onde perciò il lato a b, sarà eguale al d c, ancora l'a d, al c b, l'angolo a, all'angolo c, & il triangolo a b d, al triangolo c d b, ma questi dui triangoli sono le due parti, nelle quali è diuiso il quadrilatero dal suo diametro b d, & sono eguali; però è chiaro ancora esso quadrilatero essere diuiso dal diametro in due parti eguali, ò vogliamo dire per mezo: Finalmente sapēdo, che ciascuna delle due parti dell'angolo a d c, è eguale à ciascuna delle due parti, ad esse corrispondēti, dell'angolo a b c, sapremo, che il totale angolo d, del quadrilatero è eguale al totale angolo b, à lui opposito; Et così è noto quāto si è proposto di mostrare.

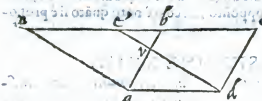
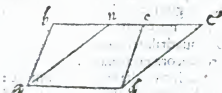
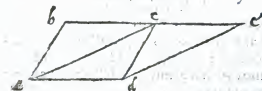
PROPOSITIONE XVIII.

Le figure quadrilatere di lati equidistanti constituite, ò formate sopra ad vna istessa base, & frà medesme linee equidistanti sono eguali frà loro.

SIano li dui quadrilateri di lati equidistanti a b c d, & a c e d, cōstituiti sopra la istessa base a d, & frà le medesme rette equidistanti a d, & b e, si dice, che essi sono eguali frà loro, perche se occorrerà, che essi dui quadrilateri habbino il termine c, commune, cioè, che il lato c d, dell'vno vēga ad essere il diametro dell'altro, essendo similmēte il lato a c, dell'altro diametro dell'vno; Alhora, perche nell'vno il diametro a c, lo diuide per mezo (per la 17. di questo) ne seguirà, che egli sia doppio al triangolo a c d, suo

 mità.

mità. Similmente, perche nell'altro il diametro c d, lo diuide per mezo (per la 17. di questo) ne seguirà, ch'egli sia doppio al triãgolo già detto a c d, sua mità, cioè il triangolo a c d, sarà così la mità dell'vno, come la mità dell'altro, ò vogliamo dire così, l'vn quadrilatero, come l'altro sarà doppio al triangolo istesso a c d, perilche (per cõmune sciẽza) essi dui quadrilateri sarãno eguali frà loro.

Ma se li dui quadrilateri dati non habbino nella retta b e, termine commune, & sia il primo l' a b c d, & il secondo l' a n e d, alhora considerate le due rette b c, & n e, ciascuna delle quali è

opposta alla retta a d, nel suo quadriletro, cioè la b c, nel primo, & la n e, nel secõdo ne seguirà, che elle siano eguali frà loro, essendo ciascuna d'esse eguale alla a d, (per la 17. di questo) onde leuata da ciascuna di esse la parte n e, commune ad ambedue ne segue, che la restante b n, sia eguale alla restante c e. Hora considerati i dui triangoli n b a, & e c d, il primo lato n b, dell'vno è già noto essere eguale al primo lato e c, dell'altro, il secondo lato a b, al secõdo lato c d, (per la 17. di questo) essendo lati opposti nel quadrilatero a b c d, di lati equidistanti, & il terzo lato n a, al terzo lato e d, (per la 17. di questo) essendo similmente lati opposti nel quadrilatero a n e d; perilche (per la ottaua del primo) l'vn triangolo sarà eguale all'altro, & hora à ciascuno d'essi giũto il traprezio quadrilatero c n a d, la somma da vna banda, cioè il quadrilatero c b a d; sarà (per cõmune scienza) eguale alla somma dall'altra, cioè al quadrilatero n e d a; che sono li dui quadrilateri proposti, onde è noto il ꝓposito.

Et se alcuno de' termini del secondo quadrilatero proposto, non fusse nella retta b c, lato del primo, ma ambidui fussero fuori d'essa,

essen-

essendo il secondo quadrilatero l'a d e n, allhora diremo la retta n e, è eguale alla a, lei opposita a d, nel quadrilatero n e d a; & alla medesima a d, è eguale la b c, che gli è opposita nel quadrilatero b a d c, perilche (per commune scienza) la n e, sarà eguale alla b c, onde gionto communemēte ad esse la e b, ne seguirà la totale retta n b, essere eguale alla totale e c. Et queste due n b, & e c, considerate come i primi lati ne' dui triangoli n b a, & e c d, seguiremo à dire ancora il secondo lato b a, è eguale al secondo lato c d, perche sono oppositi nel quadrilatero b a d c, & di più il terzo lato a n, è eguale al terzo lato d e, perche sono cōtrapositi nel quadrilatero n e d a; onde essendo li tre lati dell'vn triangolo eguali alli tre lati dell'altro, ciascuno al suo corrispondēte, ne segue (per la 8. del primo) che l'vn triangolo sia eguale all'altro; Hora da ciascuno di questi dui triangoli leuato il triangoletto e b r, commune ad ambidui, ne segue, che il restante quadrilatero n e r a, dell'vno sia eguale al restante quadrilatero b r d c, dell'altro; Et à ciascuno di questi restanti gionto il triangolo r a d; la sōma n e d a, da vna parte sarà (per commune scienza) eguale alla somma b a d c, dall'altra parte, ma queste due somme sono li dui quadrilateri di lati equidistanti proposti, & sono eguali; però è noto il proposito.

PROPOSITIONE XIX.

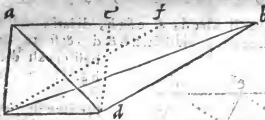
Le figure quadrilatere di lati equidistanti constituite sopra basi eguali, & frà medesime linee equidistanti sono frà loro eguali.

SIano i dui quadrangoli a b c d, & e f g h, di lati equidistanti cōstituiti frà le due rette equidistāti a f, & d g, & sopra alle due basi eguali d c, & h g. Si dice, che essi sono eguali frà loro. Per dimostrarlo, dall'estremo d, inferiore sinistro dell'a b c d, sinistro all'estremo e, superiore sinistro dell'e f g h, si tiri la retta d e, ancora dall'estremo c, inferiore destro dell'a b c d, all'estremo f, superiore destro dell'e f g h, si tiri la retta c f, quali due rette d e, & c f, saranno eguali, & equidistanti frà loro (per

la 16. di questo) essendo, che elle congiungono insieme dalle medesime parti le due rette d c, & e f, equidistanti, & eguali frà loro, poiche ciascuna d'esse è eguale alla h g, la d c, dal supposito, & la e f, per esserli opposita nel suo quadrangolo e f g h, di lati equidistanti. Hora considerati li dui quadrangoli a b c d, & e f c d, che sono constituiti sopra vna istessa base c d, & frà le medesme rette equidistanti d c, & a f, ne segue, che essi siano eguali frà loro, cioè il paralellogrãmo a b c d, sarà eguale al paralellogrammo e f c d; Ma ancora al medesmo quadrãgolo e f c d, è eguale l'e f g h, perche ambidui si intendono constituiti sopra la medesma linea, ò base e f, & frà le medesme equidistanti e f, & d g, perilche (per commune scienza) li a b c d, & e f g h, saranno eguali frà loro, come si voleua prouare.

PROPOSITIONE XX.

Li triangoli constituiti sopra ad vna istessa base, & frà due medesme linee rette equidistanti sono eguali frà loro.

Sopra alla base c d, & frà le medesme paralelle a b, & c d, siano constituiti i dui triangoli a c d, & b c d, si dice, che essi sono eguali frà loro. Per dimostrarlo, dalla a b, (allungata quando occorra) seghisi la a e, eguale alla c d, & tirisi la d e, quale sarà eguale, & equidistante alla a c, (per la 16. di questo) onde la figura a c d e, è paralellogrammo, & il diametro a d, lo diuide per mezo (per la 17. di qsto) perilche il triangolo a c d, è la mità di esso paralellogrãmo a c d e, Ancora dalla retta b a, (allungata quando occorra) si seghi la b f, eguale alla d c, &

si tiri la c f, quale sarà eguale, & equidistante alla d b, (per la 16. di questo) onde la figura b d c f, sarà paralellogrammo, & il suo diametro b c, lo diuide per mezo (per la 17. di questo) & perciò il triangolo b c d, è la mità d'esso paralellogrãmo c d b f; Ma questo paralellogrammo è eguale al paralellogrammo a c d e, (per la 18. di questo) essendo constituiti ambidui sopra ad vna istessa base c d; & frà le medesme equidistanti c d, & a b, perilche ancora le mi-

le mità loro, cioè li dui triangoli a c d, & b c d, saranno eguali frà loro, come si voleua prouare.

Questa è la 37. propositione del primo d'Euclide, quale è dimostrata con modo diuerso da quello d'Euclide; perche con Euclide, dicendosi dal punto d, si tiri vna equistante alla c a, & dal punto c, tirisi vna retta equidistante alla d b; l'auersario potria negare, che esse rette da tirarsi concorressero mai con la a b, hauendo egli per fine il negare intieramente il concorso delle linee.

PROPOSITIONE XXI.

Li triangoli constituiti sopra basi eguali, & frà due medesme linee rette equidistanti sono frà loro eguali.

Siano li dui triãgoli a b c, & d e f, constituiti sopra le due basi b c, & e f, eguali, & frà le due medesme linee rette equidistãti a d, & b f, si dice, che essi sono eguali frà loro. Per dimostrarlo, dalla a d, seghisi la a r, eguale alla b c, & si cõsideri tirata la retta e r, formando il quadrãgolo a r c b, sopra alla base b c, & sarà di lati equidistãti, perche le due rette a r, & b c, sono equidistanti frà loro dal supposito, & però anco le due a b, & r c, che le cõgiungono dalle medesme parti sarãno equidistanti frà loro (per la 16. di questo) onde il diametro a c, d'esso (per la 17. lo diuide per mezo) & così il triangolo a b c, è la metà del quadrangolo a r c b. Ancora dalla retta d a, si seghi la d n, eguale alla sua contraposita f e, & si consideri tirata la e n, quale sarà eguale, & equidistante alla f d, (per la 16. di questo) onde il quadrangolo n d f e, sarà di lati equidistanti, & però il suo diametro d e, (per la 17. di questo) lo diuiderà per mezo, cioè il triangolo d e f, sarà la mità d'esso quadrãgolo d f e n. Hora considerati li dui quadrangoli detti a b c r, & n e f d, perche essi sono fatti sopra alle due basi eguali b c, & e f, & frà le medesme due rette equidistanti a d, & b f, ne segue (per la 19. di questo) che essi siano eguali frà loro, perilche (per commune sciẽza) ancora le mità loro, cioè li dui triãgoli a b c, & d e f, saranno eguali frà loro, ch'è quello, che si voleua prouare.

Questa

Questa è la 38. del primo d'Euclide dimostrata con modo diuerso per la causa istessa detta nella superiore propositione.

PROPOSITIONE XXII.

I triangoli, & i quadrangoli di lati equidistanti constituiti frà due medesime linee rette equidistanti, ò vogliamo dire hauenti eguali altezze hanno frà loro la proportione istessa, che si troua frà le basi loro.

Siano le due rette equidistāti a b, & c d, & sù la c d, prese le due basi c n, & g d, sopra ad esse peruenēdo alla a b, siano formati i dui triangoli a c n, & b g d, si dice la proportione del primo a c n, al secondo b g d, essere come dalla base prima c n, alla secōda g d;

Per dimostrarlo, alla base c n, sù la c d, verso c, ouero verso n, si piglino quante linee continuate alla c n, si voglino eguali alla c n, & siano le n o, & o p, che così tutta la c p, sarà tre volte quanto la c n, ò vogliamo dire sarà tripla alla c n; & dalla cima a, alli termini o, & p, si tirino le dette a o, & a p, formando li triangoli a n o, & a o p, ciascuno de' quali (per la 21. di questo) sarà eguale al triangolo a c n, onde il triangolo totale a c p, che contiene li tre triangoli eguali sarà triplo à qual si vogli di loro, ò vogliamo dire sarà triplo al triangolo a c n; Et perche tanto è il numero de' triangoli partiali quāto è il numero delle basi partiali loro, poiche ciascun triangolo hà la sua particolar base, ne segue, che così sia moltiplice il triangolo totale a c p, all' a c n, come è moltiplice la base totale c p, alla c n; Ancora alla base g d, sù la d c, verso d, ouero verso g, si piglino quāte linee continuate alla g d, si voglino eguali alla g d, cioè vna, ò più, & sia per hora, che si pigli la sola g m, che così tutta d m, sarà doppia alla g d, & dalla cima b, al termine m, si tiri la retta b m, formando il triangolo b m g, quale (per la 21. di questo) sarà eguale al triangolo b g d, ò d c, il triangolo totale b m d, sarà doppio al

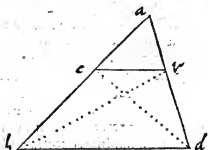
trian-

triangolo b g d; Et perche tanto è il numero di questi triãgoli partiali b g d; b g m; quãto è il numero delle basi partiali d g; g m; ne segue, che così sia moltiplice il triangolo totale b d m; al b d g; come è moltiplice la base totale d m, alla d g; Et perche i triangoli constituiti frà medesme linee rette equidistanti, se sono sopra basi eguali, sono anco frà loro eguali, ma se sopra basi ineguali sariano anco essi ineguali, & maggiore saria quello, che fusse sopra maggior base; ò vogliamo dire minore saria quello, che fusse sopra base minore, ne segue, che quando la base c p, fusse eguale alla base d m, ancora il triangolo a c p, saria eguale al triãgolo b d m, Et quando la base c p, fusse maggiore della base d m, allhora il triangolo a c p, saria maggiore del b d m; Ma quãdo la base c p, fusse minore della base d m, allhora il triangolo a c p, saria minore del b d m, cioè quello, che auuiene alla retta c p, rispetto alla retta d m; in esserli eguale, ò maggiore, ò minore, auuiene anco sempre al triangolo a c p, rispetto al triangolo b d m, in esserli similmente eguale, maggiore, ò minore. Hora considerato il triãgolo a c n, come prima di quattro quantità, il triangolo b d g, come seconda, la retta c n, come terza, & la retta d g, come quarta, noi alla prima a c n, & alla terza c n, habbiamo tolti i moltiplici egualmente (cioè hora tripli) che sono il triangolo a c p, moltiplice della prima, & la retta c p, moltiplice della terza. Ancora alla seconda b d g, & alla quarta g d, habbiamo tolti i moltiplici egualmente (cioè hora dupli) che sono il triangolo b d m, moltiplice della terza, & la retta d m, moltiplice della quarta. Et habbiamo mostrato che quello, che auuiene al moltiplice della prima, rispetto al moltiplice della seconda, cioè al triangolo a c p, rispetto al triangolo b d m, in esserli eguale, ò maggiore, ò minore, auuiene similmente sempre di necessità al moltiplice della terza, rispetto al moltiplice della quarta, cioè alla retta c p, rispetto alla retta d m, però per la diffinitione delle quantità proportionali concluderemo con la proportione della prima quantità alla seconda è come della terza alla quarta, cioè, che dal triangolo a c n, al triangolo b d g, è come della base c n, alla base d g.

L'istesso si prouarà auuenire ne i quadrangoli di lati equidistanti, se sopra alle due rette c n, & g d, in vece di triangoli si formaranno dui quadrangoli di lati equidistãti; Et anco sopra à ciascuna delle n, o, o p; & g m, si formarà similmente vn quadrãgolo di lati equidistanti, & poi argomentare come si è fatto ne' triangoli.

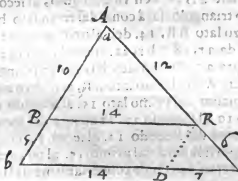
PROPOSITIONE XXIII.

Se in vn triangolo sia tirata vna linea retta, quale segando i lati, sia equidistante alla base ella segarà essi lati proportionalmente, cioè la proportione, ch'è frà la prima parte alla secõda dell'vn lato sarà eguale alla proportione, ch'è frà la prima parte alla seconda dell' altro lato.

NEl triãgolo a b d, sia tirata la c r, equidistãte alla base b d, & segãte i lati a b, & a d, in c, & r, si dice, che la proportione di a c, à c b, sarà eguale alla proportione di a r, ad r d. Per dimostrarlo. Dal punto c, al d, tirisi la retta c d, & dal pũto r, al b, la retta r b, & cõsiderinsi i dui triãgoli a r b, & c r d, quali, perche sono cõstituiti sopra ad vna istessa base c r, & frà le istesse linee rette equidistanti c r, & b d, saranno eguali frà loro; Onde la proportione, che hà il triãgolo a c r, à l'vno d'essi c r b, hauerà anco all' altro c r d; Ma dal triãgolo a c r, al c r b, è come della base a c, del primo alla base c b, del secondo (per la 22. di questo) hauendo essi la base cõgiunte in diretto, ò per il diritto, & essendo d'eguali altezze, poiche arriuano ad vna istessa sommità r. Et per la medema causa (per la 22. di questo) dal triangolo a c r, al c r d, è come della base a r, alla base r d, perche dunque la proportione della a c, alla c b, è come dal triangolo a c r, al c r b, & la proportione della a r, alla r d, è come la proportione del medesmo triangolo a c r, al c r d, ne segue, che essendo la proportione del triangolo a c r, al c r b, come quella del medesmo triangolo a c r, al c r d, che ancora la proportione di a c, à c b, parti del lato a b, sia come quella di a r, ad r d, parti del lato a d.

PROPOSITIONE XXIV.

Nelli triangoli equiangoli, i lati, che sono intorno, ò cõtengono qual si vogli angolo dell vno sono proportionali à i lati, che contengono l'angolo à quello corrispondente, & eguale dell'altro, cioè dal primo lato al secondo dell' vno, è come dal primo lato al secondo dell'al-

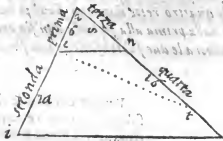
dell'altro. Et dal secondo al terzo dell'uno è come dal secondo al terzo dell'altro, & del terzo al primo dell'uno è come del terzo al primo dell'altro. Ancora i lati dell'uno sono proportionali à i lati à loro corrispondenti, ò vogliamo dire opposti à gl'angoli eguali corrispondenti dell'altro, cioè dal primo lato dell'uno al primo lato dell'altro è come dal secondo dell'uno al secondo dell'altro, & come del terzo al terzo.

SIano li dui triangoli a b r, & A B R, equiangoli, cioè, che il primo angolo a, dell'vno sia eguale al primo angolo A, dell'altro; il secondo b, al secondo B; & il terzo r, al terzo R, si dice, che la proportione del primo lato a b, 15. al secondo lato a r, 18. nell'vno, sarà come del primo lato A B, 10. al secondo lato A R, 12. nell'altro. Et dal secondo a r, 18. al terzo r b, 21. in l'vno, come dal secondo A R, 12. al terzo R B, 14. nell'altro; Et dal terzo r b, 21. al primo b a, 15. come dal terzo R B, 14. al primo B A, 10. Ancora, che dal primo lato a b, 15. dell'vno al primo lato A B, 10. dell'altro, sarà come dal secondo lato a r, 18. al secondo A R, 12. Et come dal terzo r b, 21. al terzo R B, 14. Et per dimostrarlo; Ponasi mentalmente il punto, ò angolo A, sopra al punto, ò angolo a, di modo, che la retta A B, stia sopra alla retta a b, & voltisi l'angolo A, verso l'angolo a, che così la retta A R, starà sopra alla retta a r, per essere dal supposito l'angolo A, eguale all'angolo a; hora se li pūti B, & R, si vnissero con li punti b, & r, & che perciò essi dui triangoli fussero eguali frà loro, & ciascuno de' lati dell'vno eguale à ciascuno de' lati suo corrispondente dell'altro, saria noto il proposito. Ma essendo essi dui triangoli ineguali, & li punti B, & R, restando nelle rette a b, & a r, & il lato B R, restando dentro al triangolo a b r, cioè il triangolo A B R, essendo minore, & però parte del triangolo a b r, come si vede in margine; allhora considerate le due rette B R, & b r, sopra alle quali cade la a b, ouero la

ro la a r; perche li dui angoli A B R, & a b r, ouero li dui angoli A R B, & a r b, dal ſuppoſito ſono egnali frà loro, cioè l'eſtrinſeco all'intrinſico oppoſtoli dalla medeſima parte, ne ſegue (per la 11. propoſitione di queſta Operetta) che le due rette B R, & b r, ſiano equidiſtãti frà loro, & petciò (per la 23. di queſto) la proportione di b B 5, à B A, 10. ſarà come di r R 6, ad R A, 12. perilche congiuntamente da b a, 15. à B A, 10. ſarà come da r a, 18. ad R A, 12. cioè dal primo lato a b, dell' vn triangolo al primo lato A B, dell'altro, come dal ſecondo lato a r, al ſecondo lato A R. Et hora permutatamente ſarà da a b, 15. ad a r, 18. come da A B, 10. ad A R, 12. cioè dal primo lato a b, al ſecondo lato a r, in l'vn triangolo, come dal primo lato A B, al ſecondo lato A R, nell'altro triangolo. Hora dalla retta b r, cominciando al punto b, ſi ſeghi la b D, eguale alla B R, 14. & ſi tiri la D R, quale (per la 16. di queſto) ſarà eguale, & equidiſtante alla b B, 5. onde conſiderato il triangolo r a b, nel quale la D R, equidiſtante alla b a, ſega li dui lati r a, & r b, ne ſegue (per la 23. di queſto) la proportione di r R, 6. ad R a, 12. eſſere come di r D, 7. à D b, 14. & però congiuntamente da r a, 18. ad R a, 12. ſarà come da r b, 21. à D b, 14. & però ad R B, 14. (che R B, è eguale à D b.) cioè dal ſecondo lato a r, 18. dell'vn triangolo, al ſecondo lato A R, 12. dell'altro triangolo, ſarà come dal terzo lato b r, 21. dell'vn triangolo al terzo lato B R, 14. dell'altro triangolo; Et hora permutatamente ſarà da a r, 18. à b r, 21. come da A R, 12. à B R, 14. cioè dal ſecondo lato a r, al terzo lato b r, in l'vn triangolo, ſarà come dal ſecondo lato A R, al terzo lato B R, nell'altro triãgolo. Et perche hora ſappiamo dal primo lato 15. al ſecondo 18. eſſere come dal primo lato 10. al ſecondo 12. Et ancora dal ſecondo 18. al terzo 21. eſſere come dal ſecondo 12. al terzo 14. conoſciamo, che nella equa proportionalità dal primo 15. al terzo 21. ſarà come dal primo 10. al terzo 14. Onde conuerſamente dal terzo 21. al primo 15. ſarà come dal terzo 14. al primo 10. Di più, perche ſappiamo, che dal primo lato 15. al primo lato 10. è come dal ſecondo 18. al ſecondo 12. Et di più, che dal terzo lato 21. al terzo lato 14. è medeſmamente come dal ſecondo 18. al ſecondo 12. ne ſegue, che ancora dal primo lato 15. al primo lato 10. ſia come dal terzo lato 21. al terzo lato 14.

Quì ſi è vſato à nominare le linee alcune volte con nome di numeri per commodità, & per non eſſere proliſſo nel replicare tãto ſpeſſo le linee con nomi di lettere dell'Alfabeto.

Questa è la quarta propositione del sesto libro d'Euclide, dimostrata senza seruirsi del quinto postulato.

PROPOSITIONE XXV.

Quando essendo 4. rette proportionali, cioè dalla prima alla seconda, come dalla terza alla quarta si congiungeranno insieme la prima, & la terza, in modo, che faccino angolo, & si tiri la subtensa à detto angolo, cioè si congiunghino insieme gli estremi di dette due rette prima, & terza, con vna retta; Et poi dalla parte inferiore all' angolo si giunga per il diritto la seconda alla prima, & anco la quarta alla terza, & gli estremi inferiori di queste due rette, seconda, & quarta, si congiunghino insieme con vna linea retta, ella di necessità sarà equidistãte alla prima subtensa già tirata, che congiunge la prima con la terza.

Siano le quattro rette così accommodate le a c, c i, a n, & n e, ò vogliamo dire le 6, 12. 8, 16. Si dice la retta subtensa i e, inferiore, di necessità essere equidistãte alla retta subtensa superiore c n.

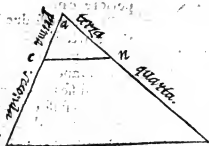
Perche se esse due subtẽse c n, & i e, nõ fussero equidistanti frà loro, ne seguiria, che dal punto c, per il verso della i e, tirando vna retta equidistante alla i e, ella non andasse sù la a e, in n, ma altroue; hor poniamo per l'auersario, se fusse possibile, che essa equidistante arriuasse alla a e, in t, cioè, che c t, fusse equidistãte alla i e, che così (per la 23. di questo) la proportione di a t, alla t e, saria come da a c, alla c i, & però dal supposito, come da a n, ad n e, il che è impossibile, essendo minor proportione di a n, ad n e, che di a t, à t e, (perche essendo a n, parte, & però minore di a t, maggior proportione è da a t, à t e, che da a n, alla istessa t e, ma perche n e, è maggiore di t e, sua parte, paragonata la a n, à ciascuna d'esse, ella alla maggiore hauerà minor proportione, onde a n, ad n e, hauerà minor proportione, che à t e, ma questa proportione di a n, à t e, è minore, che quella di a t, à t e, però tãto più da a n, ad n e,

ad n e, farà minore proportione, che di a t, à t e,) impossibile è dũque, che la retta tirata dal punto c, equidistante alla i e, non passi per il punto n; però conuerrà, che passi per esso punto n, & farà la c n; come si voleua prouare.

PROPOSITIONE XXVI.

Quando date quattro rette, & congiunte insieme ad angolo la prima, & la terza, & ad esso angolo tirata la subtensa, & poi dalla parte inferiore all'angolo giunto per il diritto la seconda alla prima, & la quarta alla terza, & ancora congiunti insieme li estremi di queste, seconda, & quarta, con vna retta subtensa, occorra, che dette due subtense siano equistanti frà loro, si dice, che la proportione della prima linea alla seconda, sarà di necessità eguale, alla proportione della terza alla quarta.

Ma quando dette due subtense non saranno equidistanti frà loro, allhora le quattro rette date non potranno essere proportionali.

Et conuersamente, quando le quattro rette date non siano proportionali frà loro, cioè, che dalla prima alla seconda non sia come dalla terza alla quarta, allhora le due subtense dette non saranno equidistanti frà loro.

Perche essendo le due subtense c n, & i e, equidistanti frà loro, & segate dalle rette a i, & a e, ne segue (per la quarta propositione di questa Operetta) che l'angolo a c n, estrinseco sia eguale all'angolo a i e, intrinseco dalla medesima parte sinistra; Et che ancora l'angolo a n c, estrinseco sia eguale all'a e i, intrinsico dalla parte destra, onde li dui triangoli a c n, & a i e, saranno equiangoli, & però di lati proportionali (per la 24. di questo) onde la proportione di a c, lato sinistro dell'vno ad a i, lato sinistro dell'altro, sarà come da a n, lato destro dell'vno ad a e, lato destro dell'altro, & disgiuntamente da a c, à c i, sarà come da a n, ad n e, cioè dalla prima delle quattro

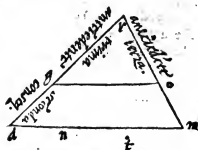
quattro rette date alla seconda, come dalla terza alla quarta.

Ma se le due subtense c n, & i e, non fussero equidistanti, allhora le quattro rette date non potranno essere proportionali, perche se fussero proportionali, saria necessario (per la antecedente 25. propositione) che esse subtense fussero equidistanti frà loro, il che è contro il supposito.

Et se le quattro rette date non siano proportionali frà loro, le due subtense di necessità sarãno non equidistanti; perche se per l'auersario elle potessero essere equidistanti, allhora (per la prima parte di questa) le quattro rette date sariano necessariamente proportionali, il che è contro il supposito.

PROPOSIT. XXVII. PROBLEMA II.

A tre date linee rette, trouare la quarta proportionale. Ouero. A due date linee rette trouare la terza proportionale.

Date le tre linee rette g r, g d, r o, per trouare ad esse la quarta proportionale, cioè la consequẽte allo r o, sua antecedẽte nella proportione di g r, antecedente alla g d, sua consequente. Congiunganfi insieme le due antecedenti ad angolo, & sia in r, & ad esso angolo r, si tiri la subtensa g o; Ancora alla prima antecedente r g, dalla parte inferiore all'angolo si congiunga per il diritto la sua consequente g d, & dall'estremo d, si tiri vna retta equidistãte alla subtensa g o, dalla banda, ò vogliamo dire per il verso di essa g o, & sia d n, quale equidistante d n, si prolunghi verso n, fin che concorra con la r o, prolungata verso o. (Et concorreranno insieme di necessità, perche douendo essere la quarta proportionale quella, che è intrapresa, ò inchiusa per il diritto della r o, frà o, & vna retta equidistante alla g o, che venga dal termine d, (per la antecedente 26. propositione) se la d n, allungata non concorresse con la r o, allungata, ne seguiria, che mai si trouasse retta quarta proportionale à tre rette date, cioè che alcuna retta non li potesse essere quarta proportionale, il che è absordo, perche

perche essendo la proportione di r g, à g d, terminata, & perciò il denominatore d'essa proportione, essendo quãtità terminata, col qual denominatore partito la r o, antecedente quantità terminata ne deue resultare il consequente, qual resultante, ò consequente sarà perciò quantità terminata anco egli, & essendo questo resultãte, ò consequente, la cercata quarta quantità, cioè essendo questa quarta quantità necessariamente terminata, & douendosi terminare dal concorso delle r o, & d n; esso concorso è necessario, che auenga. Ouero le r o, & d n, allungate quãto occorre, di necessità concorreranno insieme, perche considerando, ò imaginãdo allungata la r o, fino in m, di modo, che alla o m, la o r, habbi la proportione, che hà r g, à g d, & si tiri la d m, dal punto d, all'm, termine dell'allungamento, questa d m, di necessità (per la 25. di questo) sarà equidistante alla g o; perilche si conosce, che dal punto d; tirando vna retta equidistãte alla g o, (verso la parte hora destra) & allungandola quãto occorre, ella di necessità passarà per il punto m, per doue passa la r o, allungata, & perciò cõcorrerà in m, con essa r o, allungata) cioè si conosce, che dal punto d, verso n, tirãdo vna retta equidistãte alla g o, ella sarà vna istessa con la d m, ò vogliamo dire ella andarà sopra, cioè si vnirà con la d m, (che se ella potesse per l'auersario disunirsi dalla d m, & passare, poniamo di sotto verso t, allhora, perche così d t, come d m, sariano equidistanti alla istessa g o, ne seguiria (per la 14. di questa Operetta) che esse d t, & d m, fussero anco equidistanti frà loro, il che è absordo, & impossibile, poiche concorrono insieme in d.) Et sia, che questo cõcorso occorra in m, che così la o m, sarà la quarta proportionale cercata; Perche considerato il triangolo r d m, che hà i lati r d, & r m, segati dalla g o, equidistante alla base, ne segue (per la 23. di questo) che essi lati siano segati proportionalmente, cioè che la proportione di r o, ad o m; sia come di r g, à d g, perilche la o m, è la ricercata quarta proportionale, cioè la consequente alla r o, terza nella proportione di r g, prima à g d, seconda.

Nel medesimo modo si operarà à trouare la terza proportionale à due rette date. Pigliando, cioè la seconda, per seconda, & terza, & ad esse tre, cioè prima, seconda, & seconda (ò vogliamo dire prima, seconda, & terza) trouare la quarta proportionale; poiche la seconda vi s'intende due volte, l'vna come consequente alla prima linea, & l'altra come antecedente alla retta da trouarsi à lei consequente nella proportione della prima alla seconda.

PRO-

PROPOSITIONE XXVIII.

Quando sopra à due rette date tirata vna linea retta, che le seghi ambedue, occorrà che la somma delli dui angoli interni fatti da vna medesima parte dalla segante con le due date, sia minore di dui angoli retti, allhora è necessario, che le due rette date prolungate in infinito dalla medesima banda concorrano insieme.

SOpra alle due rette date g o, & d c, cada la retta g d; & occorrà li dui angoli g, & d, interni destri essere minori di dui retti, si dice le due rette date allungate in infinito di necessità douer concorrere insieme dalla medesma parte destra; Et per dimostrarlo: Pigliato vn punto nella g o, poniamo o, da esso, sino alla g d; si tiri la retta o r, equidistante alla d c, quale di necessità arriuarà alla g d; frà g, & d; cioè in r, (perche ne in d, ne sotto al d, può andare, che allhora saria segante la d c, & non à lei equidistante; ne in g, può andare, perche allhora la g o, istessa saria equidistante alla d c, & consequentemente (per la quarta proportione di questa Operetta) la somma delli dui angoli destri g, & d, saria eguale à dui retti, il che è cōtro il supposito, che vuole essa somma essere minore di dui retti; ne meno potrà andare di sopra dal g, (allungata la d g,) poniamo in u; perche allhora considerato il triangolo o u g, che haueria il lato u g, allungato in d; l'angolo intrinsico o u g, saria minore dell'estrinseco oppostoli o g d; onde giunto communemente l'angolo d, destro, la somma delli u, & d, saria minore della somma delli dui g, & d, perilche essendo questa somma di g, & d, dal supposito minore di dui retti, tāto più poi la somma delli u, & d, saria minore di dui retti, onde le o u, & c d, (per la 12. propositione di quest' Operetta) sariano non equidistanti, cioè la o u, non saria equidistante alla c d, come si ricerca.) Et hora alle g r, g d, & r o, si troui la quarta proportionale d m, (per la antecedente 27. propositione) cioè si allunghi d c, sino in m, di modo, che la conuenienza di r o, à d m, sia come la conuenienza di g r, à g d; O' vogliamo dire conuersamente,

 che la

che la conuenienza, quale si trouarà frà d m, & r o, sia come quella di d g, ad r g. Poi dal punto g, all' m, così trouato, si tiri la retta g m; Questa retta g m, si dice di necessità douer passare per il punto o, cioè vnirsi, & essere vna istessa linea retta con la g o, ò vogliamo dire, che la g o, allungata verso o, di necessità passarà per il punto m, concorrendo con la d m; perche oltre al punto o, dalla bãda destra non passarà, essendo che se per l'auersario vi passasse, allhora allungata la r o, fino ad essa, & sia, che vi peruenisse in t, cõsiderati li dui triangoli dell'auersario g d m, & g r t, che fariano equiangoli (poiche l'angolo d, dell'vno è eguale all'angolo r, dell'altro, per la equidistanza delle rette r o, & d m; & il g, è commune ad ambidui; onde il restante angolo dell'vno saria eguale al restante angolo dell'altro) & però di lati proportionali, ne seguiria, che la ꝓportione di r t, à d m, fusse come di g r, à g d; ma ancora (ꝑ la cõstruttione) da r o, à d m, è come da g r, à g d; pilche da r o, à d m, saria come da r t, alla istessa d m; pilche r o, & r t, fariano eguali frà loro, cioè la parte r o, al tutto r t, il che è impossibile; ne meno la retta g m; potrà passare di dẽtro dal pũto o, verso r, parte sinistra, segãdo la r o, poniamo in T. (per la istessa ragione) però cõuerrà, che passi ꝑ il punto o, & così farà vn'istessa retta con la g o, cioè la g o, allungata verso o, passarà per il punto m, doue peruiene la d c, allũgata, perilche esse due rette g o, & d c, concorreranno insieme, come si voleua mostrare.

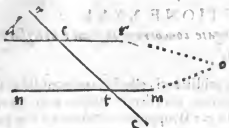
Questo è il quinto postulato del primo libro d'Euclide ridotto à Propositione, & dimostrato intieramente.

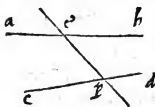
Et notisi, che se bene questa dimostratione depẽde da alcune Propositioni, che suppongono il quinto libro d'Euclide, esso quinto è libro; che stà da se, trattando della quantità in vniuersale, ne hà bisogno di dimostratione alcuna delli primi quattro libri.

PROPOSITIONE XXIX.

Quando due linee rette saranno equidistanti frà loro, elle allungate in infinito da qual si vogli parte non mai potranno concorrere insieme.

PErche se per l'auersario concorressero, poniamo dalla bãda destra, allhora elle nel concorso non haueriano frà loro distanza alcuna; & però hauendo distanza in altro luogo elle fariano non equidistanti, cioè non retinenti di continuo la medesima distanza, il che è contro il supposito; L'istesso si dice quando l'auersario volesse, che concorressero dalla banda sinistra; Et quando egli dicesse, che posso-

possono concorrere da tutte due le bande, noi oltre questo potressimo rispondere, che allhora ne seguiria, che due linee rette (cioè esse supposte equidistanti) chiudessero superficie, il che è impossibile, Ouero. Se per l'auersario le due rette equidistāti d r, & n m, potessero concorrere insieme, poniamo in o, all'hora tirata la a c, che le sega ambedue in s, & t, & cōsiderato il triāgolo o s t, li dui angoli s, & t, d'esso fariano somma minore di dui angoli retti (per il secōdo Corollario della decima di questo) ma li medesimi dui angoli s, & t, che sono li interiori dalla medesma parte destra delle due rette d r, & n m, equidistanti segate dalla a c, sono eguali à dui retti (per la 4. di questo) però essi dui angoli s, & t, fariano, & minori, & eguali à dui retti, il che è impossibile; Ouero, Considerato il triangolo o s t, hauente il lato r s, allungato in d, l'angolo t s d, esteriore, ò estrinseco faria maggiore dell'angolo s t o, intrinsico opposto li (per il primo Corollario della 10. di queito) il che è impossibile, essendo essi dui angoli d s t, & s t o, ò vogliamo dire s t m, eguali frà loro (per la 4. di questo) perche sono coalterni delle due rette d r, & n m, poste equidistanti; impossibile è dunque ancora, che dette due rette equidistanti concorrano insieme in parte alcuna. Ne meno si auicinaranno mai più in vn luogo, che in vn'altro, perche così elle fariano non equidistanti, il che è contro il supposito.

PROPOSITIONE XXX.

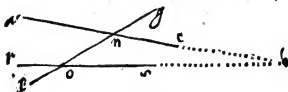
Quando due linee rette siano non equidistanti, cioè auicinandosi elle più da vna banda, che dall'altra è necessario, che allungate dalla banda doue si auicinano, elle finalmēte concorrano insieme.

Siano le due rette a b, & c d, nō equidistāti, & che più si auicinano dalla banda destra b d; si dice, che allungate da essa banda destra, elle finalmēte concorreranno insieme.

Per dimostrarlo. Tirisi sopra ad esse segandole la e p, quale con essa a b,

& c d, sarà la somma delli dui angoli interiori destri b e p; & d p e, minore di dui retti (per la 10. di questo) onde esse a b, & c d; dalla istessa banda destra (per la 28. di questo) concorrerãno insieme, come si voleua prouare.

PROPOSITIONE XXXI.

Quelle linee rette, che allungate concorrono insieme è necessario, che siano non equidistanti.

PErche se non fussero non equidistanti, elle sariano equidistanti, ma le equidistanti non possono concorrere insieme mai (per la 29. di questo) però queste, che per il supposito concorrono non potranno essere equidistanti, saranno dunque non equidistanti, come si voleua prouare; Ouero. Se le due rette a c, & r s, allungate, concorrano insieme, poniamo in h; elle sono di necessità nõ

equidistanti, perche tirata la g p, che le seghi in n, & o, & considerato il triãgolo n o h, quale (p il 2. Coroll. della 10. di q̃sto) hà i suoi tre angoli eguali à dui retti, ne segue, che li soli dui n, & o, siano minori di dui retti, ma q̃sti sono li intrinsici, ò interiori da vna istessa parte fatti dalla segãte con le due rette a c, & r s, però (per la 12. di questo) esse due rette sono non equidistanti.

PROPOSITIONE XXXII.

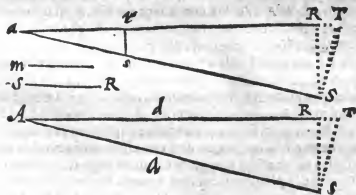
Quelle linee rette, che allungate da qual si vogli parte non concorrono mai insieme è necessario, che siano equidistanti.

PErche se elle non fussero equidistanti, sariano non equidistanti, ma allhora elle necessariamente (per la 30. di questo) concorreriano insieme, il che è contro il supposito; però non potendo concorrere insieme, cioè non potendo essere non equidistanti, saranno equidistanti frà loro; il che era da dimostrare.

PROPOSITIONE XXXIII.

Se da vn punto due linee rette, quali faccino angolo si allungaranno in infinito, la distanza loro eccederà ogni grandezza finita.

Siano

Siano le due rette a r, & a s, che fanno l'angolo a, si dice,che prolungate verso r, & s, in infinito,la distanza loro douentarà tanta, che eccederà qual si vogli determinata distanza, poniamo la m. Per dimostrarlo. Da vn punto segnato in vna delle due date rette, che fanno l'angolo a, poniamo dal punto s, segnato nella a s, si tiri la distanza da esso punto s, alla a r, cioè la perpendicolare s r, alla a r, & si consideri il triangolo a r s; poi presa vna linea alquãto più lunga à beneplacito della m, proposta, ò vogliamo dire allungata essa m, quanto si vogli se ne facci la R S, cioè si pigli la R S, più lunga della m, quanto si vogli, & dal punto R, si tiri la R a, quale con la R S, formi l'angolo a R S, eguale all'a r s. Et dal punto S, si tiri la S a, quale con la S R, formi l'angolo R S a, eguale all'angolo s. Et queste R a, & S a, si prolunghino verso a, finche concorrano insieme, & sia in A. (Et necessariamente concorrerãno,perche la somma delli dui angoli R, & S, è minore di dui retti,poiche è eguale alla somma delli dui r, & s, del triangolo a r s, & in ciascun triangolo la somma di dui angoli, quali si voglino è minore di dui retti.) Onde cõsiderato il triãgolo A R S, perche li angoli R, & S, d'esso dalla cõstruttione sono eguali alli dui angoli r,& s,del triãgolo a r s, anco ra l'altro angolo A,dell'vno sarà eguale all'altro angolo a, dell'altro.

Hora fatto centro il punto a, secondo la lunghezza della A R, si facci vn circolo fino alla circonferẽza del quale si allunghi la a r, verso r, & sia che vi arriui in R, che così la a R, sia eguale alla A R, (ò vogliamo dire dal pũto a, si tiri vna retta eguale alla A R,& poi fatto cõtro il punto a, secondo la lunghezza della tirata si formi vn cerchio fino alla circonferenza del quale verso r, si allunghi la a r,& sia, che vi arriui in R, che così la a R, sarà eguale alla tirata, & perciò ancora

ancora eguale alla A R.) Ancora sul medesmo centro a, secondo la lunghezza di A S, si formi vn cerchio fino alla circonferẽza del quale si allunghi la a s, verso s, & occorrà in S, accioche a S, sia eguale ad A S,& si tiri poi la retta R S,che così cõsiderato il triãgolo a R S, perche li dui lati a S, & a R, con il suo angolo a, da loro constituito sono eguali alli dui lati A S, A R, del triangolo R A S, & all'angolo A, da loro contenuto, ne seguirà la base R S, dell'vno, essere eguale alla base R S, dell'altro, l'angolo S, all' S, & l'angolo R, all' R, ma l'angolo R, del triangolo A R S, è retto dalla cõstruttione, perilche anco l'angolo R, del triangolo a R S, sarà retto, onde la S R, sarà perpendicolare alla a R, & però mostrarà la distanza della a S, nel punto S, alla a R, ma tal distanza R S, è eguale alla R S, del triãgolo A R S, & però maggiore della proposta lunghezza, ò magnitudine m, però le due rette a r, & a s, prolungate fino in R, & S, si conosce,che haueranno distanza frà loro maggiore della proposta m. Et anco poi dal punto S, alla a S,tirisi vna perpendicolare verso la a R, allungata quanto occorre,finche concorra con essa perpendicolare, & sia in T, (& concorreranno necessariamente , perche essendo l'angolo A R S, retto , ancora quello , che sarà fatto dalla R S, & allungamẽto della A R, sarà retto, & l' R S T, è acuto, cioè parte del retto A S T, però la somma delli dui angoli T R S, & R S T, fatti dalla parte destra dalle A T, & S T,con la segante esse, R S, sarà minore di dui retti, & però da essa parte destra cõuerrà,che cõcorrino insieme la S T,& A R, allũgata) che così essa perpẽdicolare S T, sarà la distãza della a T, nel pũto T, alla a S, qual distãza T S, sarà anco maggiore della S R, (perche nel triãgolo rettangolo T R S ; la T S, è il lato più lungo opponendosi all'angolo R, retto , che è il maggiore) & però sarà maggiore della m, proposta ; Et così conosciamo , che le rette a r, & a s, quali formano l'angolo a, si possono prolungare talmente, che non solo la distanza dell'vna all'altra, mà anco la distanza dell'altra all'vna sarà maggiore di qual si vogli distãza proposta.

☞ Questa è la dimostratione dell'Axioma supposto da Proclo per dimostrare il quinto postulato ; Ma noi conuersamente hauendo di già in altro modo dimostrato esso quinto postulato; esso mediante prouando detto supposto di Proclo si vede , che egli veramente è propositione probabile.

In altro

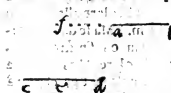
In altro modo ancora si potrà dimostrare la 28. Propositione, ò vogliamo dire il quinto postulato, se prima precederãno le seguenti dimostrationi.

DIMOSTRATIONE PRIMA.

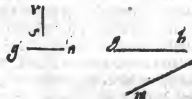
Se date due rette non equidistanti, cioè, che più si auicinano da vna banda, che dall'altra; da vn punto segnato nella prima si tirarà ad essa prima vna perpendicolare, ella di necessità segarà la seconda, intendendosi ciascuna d'esse potersi, ò douersi allungare quanto occorre.

DAte r s, & g h, non equidistanti, che più si auicinano dalla parte destra, & segnato nella g h, il punto p, se da questo alla g h, verso la r s, si tirarà vna perpendicolare, si dice, che ella segarà la r s, intendẽdosi allũgate ambedue quãto bisogna. Per dimostrarlo, Nella r s, piglisi vn pũto qual si vogli, & sia l'm, & da esso alla g h, si tiri vna perpendicolare, quale se arriuarà alla g h, in p, è noto il proposito, perche la m p, sarà perpendicolare alla g h, in p, & segarà la s r, (allungandola sopra all' m.) Ma se dall' M, tirata la perpendicolare alla g h, ella vi arriui in o, finistro dal p, allhora dall' M, tirata alla M o, la perpendicolare M t, verso la parte destra, & fatta eguale alla o p: & poi intesa la t p, che sarà eguale, & equidistante alla M o, & perpendicolare alla g h, (per la quinta di questo) in p; perche la M m, caderà frà la M t, & la g p, essendo l'angolo t m s, acuto (per la 6. di questo) & però parte del retto t M o, ne segue, che se detta r M, si allungarà à bastanza verso la t p, elle si segaranno frà loro. Ma se dall' M, tirata la perpendicolare M q, alla g h, ella resti dalla parte destra al p, allhora alla M q. dall' M, tirata la perpendicolare M x, verso la parte destra, & allungata verso la sinistra in z, facendo ciascuna delle M x, & M z, eguali alla p q, & ancò allungata la p q, in f, di

in f, di modo, che q f, sia eguale alla p q, & tirate le x f, & z p, elle saranno eguali, & equidistanti frà loro, & perpendicolari alla g f, (per la 7. di questo.) Ancora si allunghi la retta M M, verso M, destro, finche arriui alla x f, & sia in i, & anco si facci dalla parte sinistra, che M m, sia eguale ad M i, & si tiri la m z, hora considerati li dui triangoli M z m, & M x i, perche li dui lati x M, M i, dell'vno sono eguali alli dui lati z M, M m, dell'altro, & l'angolo x M i, contenuto dalli dui lati detti dell'vno, è eguale all'angolo z M m, contenuto da i dui lati detti dell'altro (per la 15. del primo, essendo essi angoli contrapositi delle rette m i, & z x, che si segano in M,) ne segue (per la quarta del primo) che anco la base m z, sia eguale alla base x i, & gl'altri angoli à gl'altri angoli, però l'angolo m z M, all'angolo i x M, ma questo i x M, è retto, però anco l'm z M, sarà retto, & retto è ancora l'M z p, però le due rette m z, & z p, sono congiunte insieme per il diritto, & sono vna sol linea (per la 14. del primo) ma questa linea m p, è perpendicolare dal punto p, alla g h, & arriua alla r m, & si segaranno frà loro allungandosi; però è noto il proposito, cioè, che segnato vn punto nella g h, & da esso punto à detta g h, eretta vna perpendicolare, ella di necessità peruerrà alla r s, allungandole quanto occorre, & verrà à mostrare la distanza, che da tal luogo, ò punto m, è dalla retta r s, alla g h.

Il medesmo concorso auuerria se le due rette date fussero equidistanti, che ciascuna retta perpendicolare all'vna, peruerria all'altra, essendo elle allungate quanto occorre; che per essempio date le due rette a b, & c d, equidistanti se nella prima c d, segnaremo il punto e, & da esso alla c d, ergeremo vna perpendicolare verso la a b, questa perpẽdicolare peruerrà alla a b, allungate elle quãto occorre, perche se dal punto e, tiraremo vna perpendicolare alla a b, allungata quanto occorre, & sia la e f, questa e f, sarà anco perpendicolare alla c d, (per la 2. di questo) onde è chiaro, che la e f, perpendicolare alla c d, peruiene di necessità alla a b, allungate esse quãto occorre.

Auertasi nondimeno, che il punto proposto nell'vna delle due nõ equidistanti non sia posto doue con essa concorresse l'altra, cioè nell'angolo, che esse formassero, perche allhora in tal luogo frà loro nõ saria distanza alcuna.

Notisi ancora, che quando delle due rette date non equidistanti l'vna

l'vna fuſſe perpendicolare all'altra (cioè, che allungandole à baſtã-za, l'vna faceſſe angoli retti con l'altra, il che auuiene quando l'vna ſia poſta per il lungo del piano, & l'altra preciſe per il largo, cioè, che l'allungamento loro ſia dell'vna per il lungo, & dell'altra per il largo d'vn medeſimo piano, che allhora eſſe due rette ſi poſſono dire ſcambieuolmente perpendicolari, ò frà loro perpendicolari) allhora ne ſeguiria, che da qual ſi vogli altro punto fuori del concorſo loro, che ſi ſegnaſſe nella inferiore, tirando vna perpendicolare ad eſſa inferiore, ella ſaria equidiſtante all'altra, & non concorrente, ò peruenente à detta altra; poiche di già ſappiamo, che tutte le rette perpendicolari ad vna iſteſſa retta ſono equidiſtanti frà loro.

Et quando la g h, & r s, ſteſſero come in margine ſi vede, e nella g h, fuſſe ſegnato il punto p, allhora dal p, tirata vna perpẽdicolare al la g h, accioche ella perueniſſe alla r s, biſognaria tirarla verſo la r s, cioè di ſotto verſo m, intendendoſi allungata eſſa r s, da quella banda quanto biſogna.

Si potrebbe anco dire, che due rette date (quali non ſiano l'vna per il diritto, cioè in linea retta con l'altra, ò che l'vna non ſia perpendicolare all'altra) eſſendo diſtanti frà loro per tutto, eccetto che nel punto doue elle concorrendo inſieme fanno angolo, & la diſtanza, che è, poniamo dalla prima alla ſeconda, moſtrãdoſi dalla perpendicolare, che arriua ad angoli retti in qualche punto alla ſeconda, eſſendoſi partita dalla prima, è neceſſario, che da qual ſi vogli punto ſegnato nella ſeconda, tirando vna perpẽdicolare alla ſeconda verſo la prima, ella peruenga alla prima, perche ſe non vi perueniſſe mai, ne ſeguiria, che frà la prima, & ſeconda non vi fuſſe diſtã-za, ò che ella fuſſe infinita, il che è abſordo, poiche & vi è diſtanza, & è in tutti i luoghi finita, ò terminata, & perciò è neceſſario, che qual ſi vogli linea, che ſia perpendicolare alla ſeconda verſo la prima ſi ſia partita da qualche punto ſegnato nella prima (allungata quanto occorre) & che perciò allungata eſſa perpendicolare verſo la prima, ella peruẽga al ſuo punto nella prima, dal quale ella ſi viene ad eſſer partita per moſtrare da tal punto la diſtanza della prima alla ſeconda.

DIMOSTRATIONE II.

Se dall'angolo retto del triangolo rettangolo si tirarà vnà perpendicolare alla base(opposta à detto angolo retto)ella diuiderà il triãgolo totale in dui triãgoli rettangoli, quali saranno equiangoli, ò vogliamo dire simili frà loro, & al triangolo totale.

NEl triangolo rettangolo b a c, dall'angolo a, retto sia tirata la perpendicolare a r, quale di necessità caderà dẽtro al triangolo diuiden do esso, & la base in due parti (perche sopra ad alcuno di lati non può cadere, essendo che ciascuno d'essi con la base fà angolo acuto, ne fuori dalla parte sinistra, ò destra nõ può cadere, poniamo in t, perche l'angolo a t c, douendo essere minore dell' a c b, (che è l'esteriore oppostoli del triangolo a t c, hauẽte il lato t c, allungato in b.) acuto, saria acuto anco egli) in r, si dice, che li dui triangoli rettangoli a r b, & a r c, sono equiangoli, ò vogliamo dire simili frà loro, & al totale c a b. Perche considerato il triangolo totale, & il partiale destro essi hãno l'angolo c, commune, oltre l'hauere l'angolo retto c a b, dell' vno eguale all'angolo retto c r a, dell'altro, però (per il secõdo Corollario della 10. di questo) il restante angolo a b c, del totale sarà eguale al restante angolo c a r, del destro, & anco considerato il triangolo rettangolo totale, & il triangolo rettangolo partiale sinistro a r b, essi hanno l'angolo a b r, commune, però il restante angolo a c r, del totale sarà eguale al restante angolo b a r, del sinistro partiale, onde ciascuno d'essi partiali è equiangolo al totale, & però anco sono equiangoli frà loro, che l'angolo a r c, retto del destro è eguale all'angolo a r b, retto del sinistro, il c, del destro al b a r, del sinistro, & il c a r, del destro al b, del sinistro, essi tre triãgoli, dunque, sono equiangoli, & però di lati proportionali frà loro (per la 24. di questo) che è quanto occorre à mostrare.

COROLLARIO.

Di quì si manifesta, che nel triangolo rettangolo dall'angolo retto tirata vna perpendicolare alla base, ella è media proportionale frà le due parti d'essa base & che il lato destro del triangolo è medio proportionale frà tutta la base, & la parte destra d'essa, conterminale à detto lato destro, & che similmente il lato sinistro e medio proportionale frà tutta la base, & la parte sinistra d'essa alla conterminale cioè à detto lato sinistro.

Perche

PErche nel triangolo rettangolo partiale destro nominãdo l'angolo a, primo, & l'angolo c, secondo, & però i lati à essi angoli oppositi 9. primo, & 12. secondo. Et perciò nel triangolo rettangolo partiale sinistro, nominãdo similmente l'angolo b, (corrispondente all'a, dell'altro) primo, & l'a, (corrispondente al c, dell'altro) secondo, & però i lati ad essi angoli oppositi 12. primo, & 16. secondo. Essendo dal primo 9. al secondo 12. nel destro, come dal primo 12. al secondo 16. nel sinistro, vediamo che il 12. è medio proportionale frà il 9. & il 16. cioè, che la perdendicolare ar, 12. del triangolo rettangolo totale, è media proportionale frà le parti cr, & rb, della base. Ancora, perche nel triangolo rettangolo totale il primo angolo verrà ad essere il b, & il secondo il c, & però per il primo lato si pigliarà l'ac, 15. & per secondo l'ab, 20. & però il terzo il bc, 25. opposto all'angolo retto, così anco il terzo lato del triangolo rettangolo partiale destro verrà ad essere l'ac, 15. opposto al suo angolo retto r, & similmente nel triãgolo rettãgolo partiale sinistro il terzo lato verrà ad essere l'ab, 20. opposto al suo angolo retto r; essendo dal secondo lato ab, 20. del triangolo totale al suo terzo lato bc, 25. come dal secondo lato br, 16. del triangolo rettangolo sinistro al suo terzo lato 20. & conuersamente dal terzo 25. al secondo 20. come dal terzo 20. al secondo 16. vediamo, che 20. è medio proportionale frà 25. & 16. cioè, che il lato ab, sinistro del triangolo rettangolo totale è medio proportionale frà la base bc, & la sua parte sinistra br. Similmente, perche da bc, 25. à ca, 15. nel triangolo rettãgolo totale è come da ac, 15. ad rc, 9. nel triangolo rettangolo partiale destro vediamo, che la ac, lato destro del triangolo rettangolo totale è medio proportionale frà la base bc, & la sua parte destra rc.

PROPOSITIONE.

Quando sopra à due rette date tirata vn'altra linea retta, che le seghi ambedue, occorra che la somma delli dui angoli interni fatti da vna medesima parte dalla segãte con le due date sia minore di dui angoli retti, allhora è necessario, che le due rette date prolungate in infinito dalla medesima banda concorrano insieme.

SOpra alle due rette date go, & dc, cada la retta gd, & occorra li dui angoli g, & d, interni destri gionti insieme essere minori di dui angoli retti si dice le due rette date allungate in infinito

finito di necessità douer concorrere insieme dalla medesma parte destra. Per dimostrarlo; Preso vn punto nella g o, poniamo o, da esso fino alla g d, si tiri la retta o r, equidistante alla d c, quale di necessità arriuarà alla g d, frà g, & d, cioè in r, (perche ne in d, ne sotto al d, può andare, che allhora saria segante la d c, & non à lei equidistãte, ne in g, può andare, perche allhora la o g, istessa saria equidistante alla d c, & consequentemente (per la quarta propositione della presente Operetta) la sõma delli dui angoli destri g, & d, saria eguale à dui retti, il che è contro il supposito, che vuole essa somma essere minore di dui retti, ne meno potrà andare di sopra al g, (allungata la d g,) poniamo in u, perche allhora considerato il triangolo o u g, che haueria il lato u g, allungato in d, l'angolo intrinsico o u g, saria minore dell'estrinseco oppostoli o g d, onde giunto communemente l'angolo d, destro, la somma delli u, & d, saria minore della somma delli dui g, & d; perilche essendo questa di g, & d, dal supposito minore di dui retti, tanto più poi la somma delli u, & d, saria minore di dui retti, onde le o u, & c d, (per la 11. propositione di quest' Operetta) sariano non equidistanti, cioè la o u, nõ saria equidistante alla c d, come si ricerca.)

Hora dal punto o, verso la d c, & peruenẽdo ad essa, si tiri vna perpendicolare alla o g, & sia o p, & dal punto p, alla r o, si tiri la perpendicolare p h, quale si allunghi, fino che ella seghi la g o, & sia in l; che così nel triangolo rettangolo l o p, la o h, che partendosi dall'angolo retto o, è perpendicolare alla base l p, sarà media proportionale frà l h, & h p, (per il Corollario della antecedẽte secõda Dimostratione) onde da l h, ad h o, sarà come da h o, ad h p. Ancora dal punto p, tirisi vna perpendicolare alla o p, verso la o r, finche arriui alla o r, & sia, che vi arriui in s, che così o h, h p, h s, sarãno continue proportionali, perche considerato il triangolo rettangolo o p s, nel quale la retta p h, che si parte dall'angolo retto o p s, è perpendicolare alla o s, base d'esso triangolo, ella (per il Corollario della antecedente seconda Dimostratione) sarà media proportionale frà le parti o h, & h s, d'essa base; Ma ancora da l h, ad h o, è come da h o, ad h p, però le quattro rette l h, h o, h p, h s, sono continue proportionali, onde dalla prima l h, alla seconda h o, sarà come da l p, cõ-

posto

posto della prima, & terza alla o s, composto della secõda, & quarta (perche essendo dalla prima alla seconda, come dalla terza alla quarta, anco permutatamente dalla prima alla terza sarà come dalla seconda alla quarta; & conuersamente dalla prima alla terza, come dalla quarta alla seconda; & congiuntamente dalla terza, & prima alla prima, come dalla quarta, & seconda alla seconda, & permutatamente dalla prima, & terza, alla seconda, & quarta, come dalla prima alla seconda.) Hora allunghisi la d p, verso la parte del punto o, fino in m, talmente, che p m, si facci eguale alla o s, che così da l h, ad h o, sarà come da l p, à p m. Poi dal punto l, all' m, così trouato si tiri la retta l m; quale si dice di necessità douer passare per il punto o, cioè vnirsi, & essere vna istessa linea retta con la l o, ò vogliamo dire, che la l o, allungata verso o, di necessità passarà per il punto m, concorrendo con la d m, perche oltre al punto o, dalla banda destra, non passarà, che se per l'auersario vi passasse, allhora allungata la r o, fino ad essa, & sia, che vi peruenisse in t, considerati li dui triangoli dell'auersario l p m, & l h t, che sariano equiangoli (poiche l'angolo p, retto dell'vno è eguale all'angolo h, retto dell'altro; l'angolo l, è commune ad ambidui; & ancora il restante angolo dell'vno è eguale al restante angolo dell'altro) & perciò di lati proportionali, ne seguiria, che la proportione di l h, ad h t, fusse come di l p, à p m, ma ancora di l h, ad h o, è come di l p, à p m, però da l h, ad h t, saria come di l h, ad h o, onde h t, & h o, alle quali la l h, haueria vna istessa proportione sariano eguali frà loro, ma h o, è parte di h t, però la parte saria eguale al tutto, il che è impossibile; ne meno la retta l m, potrà passare di dẽtro al punto o, verso r, parte sinistra per la istessa ragione, però conuerrà, che passi per il punto o, & così sarà vn'istessa retta con la l o, ò vogliamo dire g o, cioè la g o, allungata verso o, passarà per il punto m, doue peruiene la retta d c, allungata, perilche esse due rette g o, & d c, concorreranno insieme, come si volea prouare. Et quando le due rette g o, & d c, fussero quelle della presente figura, la dimostratione saria pure la istessa, mutate prima le cose da mutarsi.

Le se-

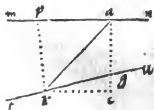
Le seguenti sono alcune cose da accommodare nella sesta, & nella decima propositio- ne di questa Operetta.

A *Facciate 12. alla quinta riga leuisi tutta la dimostratione, che segue, cominciando. Et l'acuto sarà a r p, fino al fine di righe 34. perche in essa si suppone, che le linee rette non equidistanti concorrano insieme dalla parte doue elle si auicinano, il che saria forsi negato dall'auersario, & si può prouare, però non accade supponerlo per vero. Leuisi ancora la riga 35 & in suo luogo si scriua.* Ancora si potria fare la dimostratione così. *Et à righe 38. auanti alle parole. Si dice, soggiungasi,* cioè dal punto r, preso nella retta g p, si tiri ad m n, la perpendicolare r a.

A facc. 13. nel principio alla terza riga dopò le parole, preso nella, leuisi tutta essa riga, & la quarta, quinta, & sesta, fino alle parole, che così, & in luogo di questo da leuarsi si scriua; seconda g p; ò dalla parte destra all' r, verso p, ò dalla sinistra all' r, verso g, poniamo dalla destra, & sia l' s, tirisi alla medesma prima m n, la perpendicolare s o. *Et à righe 34. leuisi, prima, & scriuasi* seconda. *A righe 35. leuisi la lettera t, & scriuasi g, Et così nel principio di righe 38. & poi nel fine di righe 38. & principio di 39. leuisi t g, peruenente alla g p, in p, & in suo luogo basta à scriuere* g t.

Nella decima propositione à facc. 17. à righe 13. principiando à contare di sotto, dopò le parole, alla istessa, r p, leuisi il resto della riga, con le sei seguenti, fino all' esser, & in luogo loro si scriua (cioè dal punto a, si tiri a n, perpendicolare ad a t, & eguale alla retta t s, & dal punto n, all' s, si tiri la retta n s, quale sarà eguale, & equidistãte alla retta a t, (per la quinta di questo) perilche l'angolo n s r, sarà retto (per la quarta di questo) & la retta a c, segarà la n s, perche l'angolo c a t, è minore del retto n a t, ouero, perche la perpendicolare c s, destra, deue essere minore della perpendicolare a t, essendo, che le rette h m, & r p, non equidistanti dal supposito si auicinano frà loro da essa parte destra. Et

A facc. 18. à righe 8. dopò la parola allhora, leuisi il resto della riga, & le 15. seguenti, & l'altra fino alle parole. Et consequentemente, & anco si leuila

cui la figura del margine, & in suo luogo si pone la figura seguente, & si scriua, da vn punto segnato nella a m, poniamo dall' m, alla r p, si tiri la perpendicolare n o, & à questa dal punto n, si tiri la perpendicolare n x, che segarà la a t, più lunga della n o, in z, peruenendo alla a s, in x, & così essa n x, sarà equidistante alla r p, (per la 7. di questo) essendo, che la n o, è perpẽdicolare ad ambedue esse r o, & x n; onde, perche elle sono segate dalla s a, ne segue (per la quarta di questo) che l'angolo a x n, sia eguale all' a s p, onde giontoli cõmunemẽte l'angolo n a x, la somma delli a s p, & n a x, che sono li interni destri delle due date h m, & r p, non equidistãti segate dalla a s, sarà eguale alla somma delli dui a x n, & n a x, del triangolo n a x, ma la somma di questi dui (per la 17. del primo) è minore di dui retti, però anco la somma delli dui detti m a s, & a s p, sarà minore di dui retti, come si voleua prouare. *Et nella istessa facciata à righe 5. principiando à contare di sotto, dopò la parola perpendicolare a g, aggiungasi questo, che segue* (cioè dal punto r, si tiri r c, perpendicolare ad r p, & eguale alla p a, & dal punto c, all' a, si tiri la retta c a, quale (per la 5. di questo) sarà eguale, & equidistãte alla r p, & essendo l'angolo p, retto, ancora (per la quarta di questo) l'angolo a, sarà retto; però c a, sarà perpendicolare ad m n, in a, & sarà segata dalla retta t u, perche l'angolo p r g, è acuto, & però parte del retto p r c, cioè la retta t u, ò vogliamo dire r g u, sarà frà le due p a, & r c.

A facc. 19. à righe 18. leuisi tutto questo, che li è scritto, cioè, finche arriui alla t u, & l'angolo a p u, sarà acuto (per la 6. di questo.) Et notisi, che nella figura il punto p, sia dentro frà m n, & t u, cioè, che non occorre, che arriui alla t u, Ancora à righe 21. leuisi questa parentesis tutta, cioè (quale sarà più corta della prima) Ancora à righe 32. dopò g r u, si aggiunga; tirata dal punto r, la r g, perpendicolare alla t u, finche arriui alla m n, in g. Et ancora, *Ancora à righe 38. dopò le parole, come l' r g u, scriuasi tutto questo, che segue, cioè.* (O vogliamo dire dal punto a, si tiri la a p, perpendicolare alla t u, & dall' istesso

punto

punto a, si tiri alla a p, la perpendicolare a s, eguale alla p r, & dall' s, all' r, si tiri la s r, che sarà eguale, & equidistante alla a p, & segarà la a n, in g, poiche l'angolo p a g, è acuto (per la 6. di questo) & perciò parte del retto p a s, onde la a n, passa di sotto alla a s, & così l'angolo r g n, sarà acuto come il p a n.

A facc. 20. al Corollario soggiungasi. Et però detto angolo esteriore è maggiore di qual si vogli delli dui interiori oppostili.

A facc. 24. al Corollario soggiungasi. Et però li dui angoli, quali si voglino d'vn triãgolo giũti insieme, sono minori di dui angoli retti.

Auertasi nondimeno, che nella decima propositione non occorreria à mutare cosa alcuna delle dette, se auanti à lei fusse stata posta la Dimostratione secõda, notata circa al fine di questa aggiũta, qual dice. Se date due rette non equidistãti, cioè, che più si auicinino da vna bãda, che dall'altra; da vn punto segnato nella prima si tirarà ad essa prima vna perpendicolare, ella di necessità segarà la seconda, intendendosi ciascuna d'esse potersi, ò douersi allungare quanto occorre.

A facc. 26. leuinsi le due vltime righe, & anco tutte le seguenti 22. della facciata 27. perche in quella dimostratione si suppone, che le rette nõ equidistanti deuano concorrere insieme dalla banda, dalla quale elle si vẽno auicinando, il che se bene è vero, non è ancora stato prouato.

IL FINE.